Architecture des ordinateurs - TD 03

1 Position du bit à 1 le plus à gauche

1. Écrire une fonction C qui retourne la position du bit à 1 le plus à gauche dans un mot de 32 bits. Utiliser une boucle et l'opérateur `>>`. Quel est le nombre d'itérations maximum effectués ?

Solution:

```
char premier_bit_a_un(uint32_t M) {
    char pos = 0;
    while(M) {
       M = M >> 1;
       pos++;
    }
    return pos;
}
```

2. Nous souhaitons accélérer l'algorithme en utilisant une méthode de recherche dichotomique, dont l'algorithme est donné ci-dessous :
   (a) Soit un mot M composé de n bits. On coupe le mot en deux parties : M_g qui contient les $n/2$ bits les plus à gauche et M_d qui contient les $n/2$ bits les plus à droite.
   (b) Si $M_g = 0$ alors le bit à 1 le plus à gauche est contenu dans M_d et sa position est comprise entre 0 et $n/2$. On recommence ce processus en remplaçant M par M_d.
   (c) Si $M_g > 0$ alors le bit à 1 le plus à gauche est contenu dans M_g et sa position est comprise entre $n/2$ et n. On recommence ce processus en remplaçant M par M_g.

   Écrire cet algorithme en C. Pour sélectionner la partie gauche d'un mot de 32 bits vous pouvez utiliser l'opération `M & 0xFFFF0000` par exemple.

Solution:

```
uint32_t masque[5] = {0xFFFF0000, 0xFF00, 0xF0, 0b1100, 0b10};
uint32_t shift[5]  = {16        , 8     , 4   , 2     , 1   };

char premier_bit_a_un_dichotomique(uint32_t M) {
    char pos = 0;
    char i;

    for (i = 0; i <= 4; i++) {
       if (M & masque[i]) {  // le bit a un est dans Mg
          M = M >> shift[i]; // on remplace M par Mg
          pos += shift[i];   // on réajuste la position
                             // (on aurait pu utiliser |=)
       }
    }
```

```
    return pos;
}
```

2 Code 2 parmi 5

Un code 2 parmi 5, représente chaque chiffre de 0 à 9 sur 5 bits. Chaque mot de 5 bits a exactement 2 bits à 1 (d'où le nom). Voici un exemple de code 2 parmi 5 :

0	01100
1	11000
2	10100
3	10010
4	01010
5	00110
6	10001
7	01001
8	00101
9	00011

Par la suite, on notera C_n le code pour le chiffre n.

1. Le code 2 parmi 5 peut-être utilisé pour encoder des codes barres. En utilisant la table ci-dessus, lire la valeur du code barre suivant :

Solution: 19889

2. La distance de Hamming $d(M, N)$ entre deux mots M et N représente le nombre de bits différents entre les mots . Ainsi, $d(1001, 1010) = 2$. Calculer $d(C_6, C_9)$? Calculer $d(C_5, C_6)$?

Solution: $d(C_6, C_9) = 2$
$d(C_5, C_6) = 4$

3. La distance de Hamming d_C d'un code est définie comme la plus petite distance de Hamming possible entre deux mots distincts du code. Soit $d_C = min\{\forall i \neq j, \quad d_h(C_i, C_j)\}$. Quelle est la distance de Hamming pour le code 2 parmi 5.

Solution: Soit C_i et C_j deux mots du code distincts. On sait que C_i et C_j ont exactement deux bits à 1.
Soit $n_i < m_i$ les positions des bits à 1 de C_i et $n_j < m_j$ les position des bits à 1 de C_j.
Premier cas : $n_i = n_j$ et $m_i = m_j$ impossible car C_i et C_j distincts.
Deuxième cas : un bit à 1 partagé par C_i et C_j et un bit différent. Supposons ici sans perte de généralité $m_i \neq m_j$. Alors la distance de Hamming est 2, il faut pour passer de C_i à C_j éteindre m_i et allumer m_j.
Troisième cas : aucun bit à 1 partagé, la distance de Hamming est 4, il faut pour passer de C_i à C_j éteindre m_i et n_i puis allumer m_j et n_j.
Donc $d_C = min(2, 4) = 2$.

4. La distance de Hamming d'un code permet de calculer combien d'erreurs peuvent être détectées e_d et combien d'erreurs peuvent être corrigées e_c. Ainsi, $e_d = d_C - 1$ et $e_c = \lfloor \frac{d_C - 1}{2} \rfloor$. Combien d'erreurs peuvent être détectées par le code 2/5 ? Combien d'erreurs peuvent être corrigées ?

Solution: $e_d = 2 - 1 = 1$ et $e_c = 0$.

3 Code avec bit de parité

On veut envoyer des mots $(a_3 \dots a_0)$ de 4 bits sur un canal. Le code de parité consiste à ajouter un bit p devant le mot $pa_3 \dots a_0$ qui signale la parité de la somme des bits du mot $(p = a_3 \oplus a_2 \oplus a_1 \oplus a_0)$. Si la somme est paire, $p = 0$, sinon $p = 1$.

1. Encoder les mots 1010 et 1000 avec un bit de parité.

   Solution: 01010
   11000

2. Calculer la distance de Hamming du code avec bit de parité.

   Solution:
   - Prenons deux mots consécutifs du code : 00000 et 10001, $d_h(00000, 10001) = 2$, donc $d_c \leq 2$.
   - Soit deux mots de 4 bits distincts x et y,
     - Si $d_h(x, y) \geq 2$ alors $d_h(parite(x), parite(y)) \geq 2$.
     - Si $d_h(x, y) = 1$ alors $parite(x) \neq parite(y)$ donc $d_h(parite(x), parite(y)) = 2$
   - Dans tous les cas $d_h \geq 2$ donc $d_c = 2$.

3. Combien d'erreurs peuvent être détectées ? Combien peuvent être corrigées ?

   Solution: On peut détecter $2 - 1 = 1$ erreur et on ne peut en corriger aucune.

4 Code à répétition

Le code à répétition 3, consiste à remplacer chaque 0 du mot initial par 000 et chaque 1 par 111.

1. Calculer la distance de Hamming du code à répétition 3.

   Solution: Il n'y a que 2 mots dans l'image du code, 000 et 111, la distance est 3.

2. Combien d'erreurs peuvent être détectées ? Combien peuvent être corrigées ?

   Solution: $3 - 1 = 2$ erreurs peuvent être détectées. $\frac{2}{2} = 1$ erreur peut être corrigée.

3. Vous recevez les messages suivants : indiquez si des erreurs se sont produites, le cas échéant corrigez les.
   111000111
   110000011011

   Solution: premier message : pas d'erreur. deuxième message : 3 erreurs, 111000111111

4. Vous disposez d'un canal de communications dont la probabilité d'intervertir un bit du message est de $p_e = 0.001$ (pour tout n et m distincts la probabilité d'avoir une erreur sur le bit n et une erreur sur le bit m sont considérées indépendantes). Vous utilisez un code à répétition 3 pour envoyer un message original de 100 bits. Quelle est la probabilité pour que le destinataire reçoive le bon message avant correction ? après correction ?

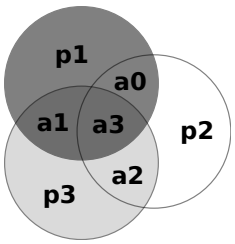
Solution: Soit N_n la loi donnant le nombre d'erreurs pour un message de longueur n. N_n suit une loi binomiale (car les erreurs sont des évènements indépendants). Donc $P(N_n = k) = C_n^k.p_e^k.(1-p_e)^{(n-k)}$.

- La probabilité d'avoir un bon message avant correction, c'est $P(N_{300} = 0) = C_{300}^0.p_e^0.(1-p_e)^{300} = (1-p_e)^{300} > 0.73$
- Soit P_1 a probabilité d'avoir une ou zéro erreur par bloc de trois bits : $P_1 = P(N_3 = 1) + P(N_3 = 0) = 3.pe.(1-p_e)^2 + (1-p_e)^3$
  Donc la probabilité de pouvoir corriger un bloc de trois bits est de : P_1.
  La probabilité de pouvoir corriger le message composé de 100 blocs est de $(P_1)^{100} > 0.9997$

5 Code de Hamming (7,4)

Le code de Hamming (7,4) transmet 4 bits d'informations en utilisant 3 bits de parité. Pour encoder le mot $a_3a_2a_1a_0$ on écrira $p_1p_2a_0p_3a_1a_2a_3$ avec $p_1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3$, $p_2 = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3$ et $p_3 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$.
On peut résumer la couverture des bits de parité avec la table ou avec le diagramme de Venn suivants :

	a_0	a_1	a_2	a_3
p_1	1	1	0	1
p_2	1	0	1	1
p_3	0	1	1	1



1. En s'appuyant sur le diagramme de Venn, si on change un bit des données (a_0 à a_3) combien de bits de parité changent nécessairement ?

   Solution: 2 ou 3 (pour a_3)

2. Quelle est donc la distance de Hamming du code ? Combien d'erreurs peuvent être détectées ? Combien peuvent être corrigées ?

   Solution: La distance de Hamming du code est $2 + 1 = 3$. On peut donc détecter 2 erreurs et en corriger 1.

3. Vous recevez les messages suivants, indiquez si une erreur s'est produite, le cas échéant corrigez le mot reçu : 0001111 1110010 1101110 0011111.

   Solution: 0001111 Message correct (vérifier que le diagramme de Venn est correct).
   1110010 p3 et p2 sont incorrects, pour rendre le message correct en changeant un seul bit, il faut changer a2. On remarque que $3 + 2 \equiv 2[3]$.
   1101110 p3 est incorrect, erreur sur le bit de parité.
   0011111 p1 et p2 incorrects, il faut changer a0. On remarque que $1 + 2 \equiv 0[3]$.